PERANAN CONTOH PENYANGKAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Rudi Santoso Yohanes
Universitas Katolik Widya Mandala Madiun
rudisantoso@widyamandala.ac.id

ABSTRAK

Di matematika dikenal tiga macam contoh, yaitu contoh ilustratif (illustrative-examples), non-contoh (non-examples), dan contoh penyangkal (counter-examples). Pada umumnya contoh-contoh yang disajikan dalam buku-buku teks matematika adalah contoh-contoh yang bersifat ilustratif, yaitu contoh yang dimaksudkan untuk memberi gambaran yang jelas tentang suatu uraian atau konsep yang sedang dibicarakan. Sedangkan contoh penyangkal dapat diartikan sebagai contoh yang peranannya bukan memberikan ilustrasi untuk suatu pernyataan yang benar, melainkan untuk menunjukkan bahwa suatu dugaan bernilai salah. Membuat contoh penyangkal untuk suatu pernyataan, sering kali merupakan pekerjaan yang tidak mudah, memerlukan pemikiran yang dalam dan luas, sehingga merupakan masalah tersendiri yang menarik dan merangsang untuk dipecahkan. Contoh penyangkal juga sering digunakan dalam pembelajaran matematika, yang pada prinsipnya bertujuan untuk membantu siswa/mahasiswa dalam memahami suatu konsep matematika. Makalah ini membahas peranan contoh penyangkal dalam pembelajaran matematika.

Kata kunci: Contoh penyangkal; Pembelajaran matematika.

ABSTRACT

In Mathematics, there are three kinds of example, which are illustrative-example, non-examples, and counter-example. In general, the examples given in some mathematical textbooks are illustrative-examples which give clear illustrations about an explanation or concept that is being discussed. On the other hand, counter-examples can be defined as examples which do not give illustrations for a correct statement, but show an incorrect statement. In fact, creating a counter-example for a statement is not an easy task which needs deeper and wider thoughts and becomes an interesting and appealing problem to be solved. Counter-examples are also commonly used in mathematics learning, which aims to help the students in understanding of a mathematical concept. This paper will discuss the role of counter-examples in mathematics learning.

Key words: *Counter-example; Mathematics learning.*

PENDAHULUAN

Kemampuan membuktikan sebuah pernyataan atau teorema matematika merupakan salah satu kemampuan yang sangat esensial dan harus dimiliki oleh mahasiswa yang belajar matematika. Pernyataan ini didasari oleh fakta bahwa bagian terbesar dalam matematika di perguruan tinggi adalah masalah membuktikan. Dari kegiatan membuktikan ini, mahasiswa dilatih untuk berpikir kritis dan sistematis, menata nalar, dan berkreasi. Kemampuan membuktikan juga termasuk salah satu kemampuan berpikir tingkat tinggi *(Higher Order Thinking Skill)*, yang tidak dapat dipungkri bahwa kemampuan ini merupakan kemampuan yang sangat diperlukan dalam memasuki abad 21.

Salah satu persoalan utama dalam matematika adalah menyelidiki kebenaran suatu pernyataan, misal kita ambil pernyataan p adalah: “Setiap anggota himpunan A adalah anggota himpunan B”. Untuk menunjukkan bahwa pernyataan p bernilai “benar”, harus diperlihatkan suatu bukti bahwa A termuat di dalam B.

Sedangkan untuk menunjukkan bahwa pernyataan p bernilai "salah", harus dapat ditunjukkan adanya suatu anggota himpunan A yang bukan anggota himpunan B. Dengan perkataan lain, harus dikonstruksi suatu contoh yang "menyangkal" kebenaran pernyataan p. Contoh semacam ini dinamakan suatu "contoh penyangkal" untuk pernyataan p.

Pada umumnya contoh-contoh yang disajikan dalam buku-buku teks matematika adalah contoh-contoh yang bersifat ilustratif, yaitu contoh yang dimaksudkan untuk memberi gambaran yang jelas tentang suatu uraian atau konsep yang sedang dibicarakan. Sedangkan contoh penyangkal dapat diartikan sebagai contoh yang peranannya bukan memberikan ilustrasi untuk suatu pernyataan yang benar, melainkan untuk menunjukkan bahwa suatu dugaan bernilai salah.

Pernyataan "Setiap anggota himpunan A adalah anggota himpunan B" sesungguhnya adalah suatu implikasi. Jika himpunan semesta adalah himpunan X, maka pernyataan di atas dapat disajikan sebagai berikut: $(\forall x \in X)(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Untuk menunjukkan bahwa pernyataan di atas salah, harus ditunjukkan adanya elemen $y \in X$ dengan $y \in A$ dan $y \notin B$. Jadi $(\exists y \in X)(y \in A \text{ dan } y \notin B)$. Kadang-kadang untuk mencari elemen y semacam itu, yaitu membuat contoh penyangkal untuk suatu pernyataan, merupakan pekerjaan yang tidak mudah, memerlukan pemikiran yang dalam dan luas, sehingga merupakan masalah tersendiri yang menarik dan merangsang untuk dipecahkan. Contoh penyangkal juga dapat dimanfaatkan dalam proses pembelajaran matematika, yang pada prinsipnya bertujuan untuk membantu siswa/mahasiswa untuk dapat lebih memahami suatu konsep matematika yang sedang dipelajari. Makalah ini membahas peranan contoh penyangkal dalam pembelajaran matematika.

PEMBAHASAN

Contoh Ilustratif, Non-Contoh, dan Contoh Penyangkal

Kalau kita perhatikan dengan seksama, dalam buku-buku teks matematika pada umumnya kita jumpai:

1. Konsep-konsep matematika yang disajikan dalam bentuk definisi.
2. Lemma, Proposisi, Teorema, yaitu pernyataan yang menyangkut beberapa konsep, yang biasanya disajikan dalam bentuk implikasi atau biimplikasi.
3. Bukti-bukti baik secara langsung maupun tidak langsung yaitu menggunakan kontradiksi.
4. Contoh-contoh yang dimaksudkan untuk menjelaskan konsep, lemma, atau teorema yang sedang dibicarakan.

Contoh dalam matematika pada umumnya dibedakan menjadi tiga jenis, yaitu contoh ilustratif (*illustrative-examples*), non-contoh (*non-examples*), dan contoh penyangkal (*counter-examples*). Contoh ilustratif adalah contoh yang dimaksudkan untuk memberikan gambaran yang jelas tentang maksud dan pengertian apa yang terkandung dalam suatu uraian atau ungkapan yang sedang dibicarakan. Non-Contoh adalah contoh yang menunjukkan keterbatasan atau syarat perlu dari suatu konsep. Sedangkan contoh penyangkal dapat diartikan sebagai contoh yang peranannya bukan memberikan ilustrasi untuk suatu pernyataan yang benar, melainkan untuk menunjukkan bahwa suatu dugaan bernilai salah (Watson & Mason, 2005; Klymchuk, 2009).

Bila kita sedang mengenalkan bilangan rasional, maka 5, $\frac{1}{7}$, -10, $-\frac{5}{9}$, $7{,}125$ adalah contoh ilustratif untuk bilangan rasional, sedangkan $\sqrt{2}$, $-\sqrt{7}$, π, $\sqrt[3]{5}$ adalah bukan bilangan rasional atau non-contoh (*non-examples*) untuk bilangan rasional, dan sekaligus merupakan contoh penyangkal (*counter-examples*) untuk pernyataan setiap bilangan merupakan bilangan rasional.

Peranan dan Kegunaan Contoh Penyangkal

Berikut ini diuraikan beberapa permasalahan yang memperlihatkan peranan dan kegunaan contoh penyangkal dalam proses pembelajaran matematika.

1. Menggugurkan Dugaan yang Masih Diragukan Kebenarannya

   Bekerja dalam matematika seringkali kita sampai pada suatu dugaan, namun masih diragukan apakah dugaan itu benar. Apabila bisa diciptakan contoh penyangkal terhadap dugaan itu, berarti telah dibuktikan bahwa dugaan itu salah.

   Contoh 1.

   Pada tahun 1640, Fermat menduga bahwa semua bilangan asli yang berbentuk $2^{2^m}+1$, dengan $m \in N$ adalah bilangan prima. Oleh Euler, dugaan Fermat digugurkan dengan suatu contoh penyangkal, yaitu untuk m = 5, bentuk itu habis dibagi 641.

   $2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$.

   Untuk menghormati hasil kerjanya, bilangan prima yang berbentuk $2^{2^m}+1$, dengan $m \in N$ dinamakan bilangan Fermat (Cindy Tsang, 2010; Klymchuk, 2009).

   Contoh 2.

   Jika diketahui: $P(n) = n^2 - n + 41$, dengan $n \in N$, apakah $P(n)$ merupakan bilangan prima, untuk setiap $n \in N$?

   Ternyata "Tidak", meskipun $P(1), P(2), P(3), P(4), \cdots, P(40)$ merupakan bilangan prima, tetapi $P(41)$ bukan merupakan bilangan prima, karena $P(41)$ habis dibagi 41 (Bartle, 2000:15).

   Bila kita belum berhasil menemukan contoh penyangkal terhadap dugaan itu, maka dugaan itu masih tetap sebuah dugaan. Dalam matematika, ada dugaan yang sampai sekarang belum dapat dibuktikan kebenarannya dan juga belum ditemukan contoh penyangkalnya, yaitu dugaan Goldbach (Goldbach conjecture) yang berbunyi: Setiap bilangan genap yang lebih besar dari 2 selalu dapat ditulis sebagai hasil penjumlahan dari dua bilangan prima. Dugaan ini sampai sekarang belum bisa dibuktikan secara deduktif dan belum ditemukan contoh penyangkalnya untuk menunjukkan dugaan itu salah (Klymchuk, 2009)

2. Menanamkan Pengertian Suatu Konsep

   Konsep dalam matematika adalah suatu ide abstrak yang memungkinkan kita untuk dapat mengklasifikasikan (mengelompokkan) objek atau kejadian, dan menerangkan apakah objek atau kejadian itu merupakan contoh atau bukan contoh dari ide tersebut. Siswa dikatakan benar-benar memahami suatu konsep, bila siswa tersebut dapat membuat contoh ilustratif dari konsep itu dan dapat membuat contoh penyangkalnya.

   Contoh 3.

   Kita tinjau konsep kekonvergenan barisan bilangan real.

   Barisan bilangan real $\{a_n\}$ dikatakan konvergen apabila:

   a. dapat ditemukan bilangan $a \in R$ yang memenuhi sifat:
   b. untuk setiap $\varepsilon \in R$, dapat dicari bilangan $k \in N$, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan $n \in N$ dengan $n \geq k$ berlaku $|a_n - a| < \varepsilon$. (Bartle, 2000:54).

   Barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = \frac{1}{n}$ adalah contoh ilustratif untuk barisan konvergen, karena kita dapat menemukan bilangan real $a = 0$ yang memenuhi sifat (b).

   Tetapi barisan bilangan real $\{b_n\}$ dengan $b_n = (-1)^n$ adalah barisan bilangan real yang tidak konvergen, karena $\{b_n\}$ tidak memenuhi (a) dan (b). Artinya untuk setiap bilangan $b \in R$, bilangan b ini tidak memenuhi (b). Jadi dapat dicari $\varepsilon > 0$ misalnya $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sehingga untuk setiap $k \in N$, selalu terdapat bilangan $n \in N$ dengan $n \geq k$ dan $|b_n - b| \geq \frac{1}{2}$.

   Barisan $\{b_n\}$ ini merupakan suatu contoh untuk barisan yang tidak konvergen dan sekaligus merupakan contoh penyangkal untuk pernyataan "Setiap barisan bilangan real adalah konvergen".

3. Memperlihatkan Esensi Suatu Syarat

   Dalam hipotesis suatu teorema, seringkali terdapat beberapa syarat yang harus dipenuhi agar konklusi teorema itu benar. Andaikan kita akan menyelidiki apakah syarat-syarat itu tidak berlebihan?

   Suatu syarat memang diperlukan (esensial), bila dapat diperlihatkan bahwa konklusi tidak benar bila syarat tersebut digugurkan. Hal ini cukup ditunjukkan dengan contoh penyangkal.

Contoh 4.

Teorema Nilai Ekstrim (*Extreme-Value Theorem*)

Jika f adalah fungsi kontinu pada interval tertutup $[a,b]$, maka terdapatlah suatu titik $x_o \in [a,b]$ dimana f mencapai maksimum, dan terdapatlah suatu titik $x_1 \in [a,b]$ dimana f mencapai minimum (Anton, 1988:243)

Akan ditunjukkan dengan contoh penyangkal bahwa syarat kontinu dan syarat interval tertutup $[a,b]$ adalah esensial dalam hipotesis teorema di atas, artinya bila syarat di atas tidak dipenuhi, maka keberadaan nilai maksimum atau nilai minimum tidak dijamin.

Contoh Penyangkal:

a. Fungsi $f(x) = 2x + 1$ adalah fungsi kontinu pada interval $(-\infty,\infty)$, sehingga juga kontinu pada interval $(0,3)$. Tetapi f tidak memiliki nilai maksimum maupun minimum pada interval $(0,3)$. Hal ini menunjukkan bahwa syarat interval tertutup $[a,b]$ adalah esensial.

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{untuk } 0 \le x < 1 \text{ atau } 1 < x \le 2 \\ 2, & \text{untuk } x = 1 \end{cases}$

Fungsi f tidak kontinu pada interval $[0,2]$, dan ternyata tidak mempunyai nilai maksimum maupun nilai minimum. Dengan demikian syarat f kontinu adalah esensial.

4. Membuktikan Suatu Syarat Hanya merupakan Syarat Perlu tetapi Bukan Merupakan Syarat Cukup

Dalam implikasi $A \Rightarrow B$, maka B dinamakan syarat perlu untuk terjadinya A, dan A merupakan syarat cukup untuk terjadinya B. Dalam teorema yang berbentuk $A \Rightarrow B$, pada umumnya B hanya merupakan syarat perlu saja, tetapi bukan merupakan syarat cukup untuk terjadinya A. Dengan contoh penyangkal, dengan jelas akan terbukti bahwa dalam teorema yang berbentuk $A \Rightarrow B$, B bukan merupakan syarat cukup untuk terjadinya A.

Untuk mengetahui apakah B merupakan syarat cukup untuk terjadinya A, dapat dipastikan dengan menjawab pertanyaan berikut ini:

"Jika syarat B dipenuhi, apakah A pasti terjadi?"

Jika jawabannya "ya" (dan ini harus dibuktikan secara deduktif), maka B adalah syarat cukup untuk terjadinya A.

Jika jawabanya "tidak" (cukup ditunjukkan dengan sebuah contoh penyangkal), maka B bukanlah syarat cukup (tidak cukup) untuk terjadinya A.

Contoh 5.

Teorema:

Jika f diferensiabel di $x = x_o$, maka f kontinu di $x = x_o$ (Anton, 1988:154)

Pertanyaan:

Jika f kontinu di $x = x_o$, apakah f diferensiabel di $x = x_o$?

Jawabannya adalah "tidak", yang diperlihatkan dengan contoh penyangkal berikut ini.

$f(x) = |x|$

Fungsi ini kontinu di $x = 0$, tetapi tidak diferensiabel di $x = 0$ (Anton, 1988:155).

Contoh 6.

Teorema:

Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, maka $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ (Anton, 1988: 620)

Pertanyaan:

Jika $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, apakah $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen?

Jawabannya tidak. Hal ini cukup dibuktikan dengan menggunakan contoh penyangkal.

Pilih barisan: $a_k = \frac{1}{k}$

Meskipun $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, tetapi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergen (Anton, 1988:617-618)

5. Membuktikan bahwa Suatu Syarat Merupakan Syarat Cukup, tetapi Bukan Syarat Perlu

   Sekali lagi, pada teorema yang berbentuk $A \Rightarrow B$, pada umumnya A hanya merupakan syarat cukup saja dan tidak merupakan syarat perlu untuk terjadinya B. Dengan contoh penyangkal dapat diperlihatkan bahwa syarat cukup bukan merupakan syarat perlu.

   Untuk mengetahui apakah A merupakan syarat perlu untuk terjadinya B, dapat dipastikan dengan menjawab pertanyaan berikut ini:

   "Jika syarat A tidak dipenuhi, apakah akan mengakibatkan tidak terjadnya B?"

   Bila jawabannya "ya" (dan ini harus dibuktikan secara deduktif), maka A adalah syarat perlu untuk terjadinya B.

   Bila jawabannya "tidak" (cukup ditunjukkan dengan sebuah contoh penyangkal), maka A bukanlah syarat perlu untuk terjadinya B.

   Contoh 7.

   Teorema:

   Jika $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergen (Anton, 1988:651)

   Pertanyaan:

Jika $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ tidak konvergen, apakah $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ tidak konvergen?

Jawabannya "tidak", cukup ditunjukkan dengan contoh penyangkal.

Pilih deret: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \cdots$

Meskipun $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergen (Anton, 1988:617-618)

Tetapi $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergen (Anton, 1988:647)

6. Menjelaskan Teorema yang Terpaksa Belum Dapat Dibuktikan

Dalam matakuliah Kalkulus, ada teorema yang tidak dibuktikan, karena memang belum saatnya untuk membuktikannya, namun teorema ini harus segera digunakan.

Contoh 8.

Teorema Nilai Tengah (*Intermediate Value Theorem*)

Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan C adalah sebarang bilangan yang memenuhi sifat $f(a) \leq C \leq f(b)$, maka terdapatlah $x_o \in [a, b]$ sedemikian sehingga $f(x_o) = C$ (Anton, 1988:125).

Teorema ini hanya disajikan secara intuitif, karena tidak mudah untuk membuktikan. Bukti dari teorema ini dapat ditemukan pada buku teks Kalkulus lanjut (Anton, 1984:125).

Setelah dijelaskan maksud teorema itu dengan beberapa contoh ilustratif dan diberikan arti geometrinya, maka dibuatkan contoh penyangkalnya bahwa konklusi tidak benar bila hipotesis dalam teorema ini tidak dipenuhi. Dengan demikian diharapkan teorema ini dapat diyakini kebenarannya meskipun belum dibuktikan.

Contoh penyangkalnya:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{jika } x = 1 \\ 3x & \text{jika } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Fungsi f ini tidak kontinu pada interval tertutup $[0,2]$, meskipun $f(0) \leq C = 2{,}5 \leq f(2)$, tetapi tidak ada x_o dengan $0 \leq x_o \leq 2$ dan $f(x_o) = 2{,}5$.

SIMPULAN

Dalam proses mengajar belajar, selain diberikan uraian tentang topik yang dibahas, pembuktian yang cermat, contoh-contoh yang bersifat ilustratif, perlu juga diberikan contoh-contoh penyangkal yang ternyata mempunyai banyak peranan yang dapat merangsang dan menantang dalam proses mengajar belajar matematika.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, 1988, *Calculuc with Analytic Geometry*, (Third Edition), New York: John Wiley & Sons, Inc.

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R., 2000, Introduction to Real Analysis, (Third Edition), New York: John Wiley & Sons, Inc.

Klymchuk, Sergiy, 2017, *Using Counter-Examples to Enhance Learners' Understanding of Undergraduate Mathematics*, Auckland University of Technology, dapat diunduh di https://www.researchgate.net/publication/242678752

Tsang, Cindy, 2010, Fermat Numbers, University of Washington, dapat diunduh di https://wstein.org/edu/2010/414/projects/tsang.pdf

Watson, A. & Mason, J. 2005. *Mathematics as A Constructive Activity*: *Learners Generating Examples*. London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.