

SUATU KAJIAN DERIVASI YANG DIINDUKSI OLEH ENDOMORFISMA PADA PSEUDO BG-ALJABAR

Ramadhani Fitri¹, Sri Gemawati^{2*}, Susilawati³

^{1,2,3}Universitas Riau, Indonesia

*corresponding author: sri.gemawati@lecturer.unri.ac.id.

Received 08 September 2025; revised 24 November 2025; accepted 10 Desember 2025.

ABSTRAK

Penelitian ini mengembangkan konsep derivasi pada pseudo BG-aljabar melalui pendekatan berbasis endomorfisma. BG-aljabar $(P; *, 0)$ adalah himpunan tak kosong P dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0 yang memenuhi aksioma (BG1) $p * p = 0$, (BG2) $p * 0 = p$, dan (BG3) $(p * q) * (0 * q) = p$ untuk setiap $p, q \in P$. Pseudo BG-aljabar $(R; *, \diamond, 0)$ merupakan generalisasi BG-aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi (PBG1) $p * 0 = p \diamond 0 = p$, (PBG2) $p * p = p \diamond p = 0$, dan (PBG3) $(p * q) \diamond (0 * q) = (p \diamond q) * (0 \diamond q) = p$ untuk setiap $p, q \in R$. Penelitian ini memperkenalkan dua jenis derivasi utama, yaitu f -derivasi dan (f, g) -derivasi, yang masing-masing dikonstruksi melalui operasi gabungan (\odot) dan operasi simetris (\oslash) . Metode penelitian menggunakan pendekatan aksiomatik-deduktif dengan teknik pembuktian teorema berbasis sistem aksioma pseudo BG-aljabar. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pendekatan menggunakan endomorfisma, baik dengan satu fungsi f maupun pasangan fungsi (f, g) , menghasilkan kerangka derivasi yang konsisten dan dapat dikarakterisasi secara sistematis. Teorema fundamental membuktikan bahwa f -derivasi kiri reguler identik dengan endomorfisma penginduksinya. Kerangka teoretis yang dihasilkan memberikan landasan untuk eksplorasi derivasi pada struktur aljabar pseudo lainnya.

Kata kunci: *endomorfisma, f-derivasi, pseudo BG-aljabar*

ABSTRACT

This research develops the concept of derivation on pseudo BG-algebras through an endomorphism-based approach. A BG-algebra $(P; *, 0)$ is a non-empty set P with binary operation $*$ and constant 0 satisfying (BG1) $p * p = 0$, (BG2) $p * 0 = p$, and (BG3) $(p * q) * (0 * q) = p$ for all $p, q \in P$. A pseudo BG-algebra $(R; *, \diamond, 0)$ generalizes BG-algebra with two binary operations satisfying (PBG1) $p * 0 = p \diamond 0 = p$, (PBG2) $p * p = p \diamond p = 0$, and (PBG3) $(p * q) \diamond (0 * q) = (p \diamond q) * (0 \diamond q) = p$ for all $p, q \in R$. This research introduces two main types of derivation, namely f -derivation and (f, g) -derivation, constructed via the combined operation (\otimes) and symmetric operation (\odot) . The research method employs an axiomatic-deductive approach with theorem-proving techniques based on the pseudo BG-algebra axiom system. Results demonstrate that the endomorphism-based approach, using either a single function f or a function pair (f, g) , yields a derivation framework that is consistent and systematically characterizable. A fundamental theorem proves that a regular left f -derivation is identical to its inducing endomorphism. The resulting theoretical framework provides a foundation for exploring derivations on other pseudo algebraic structures.

Keywords: *endomorphism, f-derivation, pseudo BG-algebra*

PENDAHULUAN

Teori derivasi pada struktur aljabar abstrak telah berkembang pesat sejak diperkenalkan dalam konteks aljabar asosiatif dan kemudian diperluas ke berbagai struktur aljabar non-asosiatif. BG-aljabar, yang diperkenalkan oleh Neggers dan Kim (2002), merupakan salah satu struktur aljabar yang mendapat perhatian signifikan dalam dua dekade terakhir. Konsep derivasi pada BG-aljabar standar telah dikaji dalam berbagai aspek, termasuk (l, r) -derivasi dan (r, l) -derivasi (Hassan & Ibrahim, 2023; Kumar & Singh, 2024). Namun, perluasan konsep ini ke pseudo BG-aljabar, yang merupakan generalisasi BG-aljabar dengan dua operasi biner, masih merupakan wilayah yang belum banyak dieksplorasi.

Pseudo BG-aljabar $(R; *, \diamond, 0)$ merupakan struktur aljabar yang memiliki dua operasi biner $*$ dan \diamond yang tidak selalu komutatif. Penelitian-penelitian

terdahulu telah mengkaji berbagai aspek derivasi pada pseudo-struktur terkait. Beberapa studi berfokus pada derivasi standar dalam pseudo BCK-aljabar (Lee & Song, 2023; Wang et al., 2024; Kim & Choi, 2023), sementara yang lain mengkaji pseudo BCI-aljabar dengan penekanan pada filter dan ideal (Rahman & Abdullah, 2024; Zhang & Wu, 2023; Park et al., 2024). Penelitian tentang pseudo BE-aljabar telah mengembangkan konsep t -derivasi dan generalisasinya (Chen & Li, 2023; Martinez & Silva, 2024). Studi-studi mengenai fq -derivasi pada struktur BM-aljabar dan BP-aljabar (Ahmad & Yusof, 2024; Liu & Chen, 2024) juga telah memperkenalkan parameter tambahan dalam formulasi derivasi.

Meskipun penelitian-penelitian tersebut memberikan kontribusi signifikan, terdapat celah yang jelas dalam literatur. Tidak ada studi yang secara khusus menganalisis karakteristik f -derivasi dan (f, g) -derivasi pada struktur dengan dua operasi biner seperti pseudo BG-aljabar, terutama dalam konteks derivasi tipe 1 dan tipe 2 serta derivasi kiri (Nguyen & Tran, 2024; Oliveira & Santos, 2023; Yamamoto & Tanaka, 2025). Kim & Park (2023) menunjukkan bahwa ekspansi derivasi pada struktur aljabar non-komutatif memerlukan analisis mendalam terhadap kompatibilitas operasi, sementara Zhang & Liu (2024) menegaskan bahwa introduksi endomorfisma ke dalam formulasi derivasi pada pseudo-struktur umumnya menghasilkan kondisi kereguleran yang menantang.

Kebaruan penelitian ini terletak pada: (1) introduksi konsep f -derivasi pada pseudo BG-aljabar yang dikonstruksi melalui operasi gabungan (\odot) dan operasi simetris (\oslash) sebagai inovasi metodologis; (2) pengembangan (f, g) -derivasi yang melibatkan dua endomorfisma sekaligus, yang merupakan generalisasi sejati dari f -derivasi; dan (3) pembuktian teorema fundamental bahwa f -derivasi kiri reguler identik dengan endomorfisma f penginduksinya — suatu hasil yang secara teoretis tidak mudah diduga mengingat kompleksitas struktur yang terlibat (Russo & Martinez, 2024; Chen et al., 2025).

Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini merumuskan dua permasalahan sentral. Pertama, bagaimana karakteristik dan sifat-sifat fundamental f -derivasi pada pseudo BG-aljabar, termasuk konstruksi f -derivasi tipe 1 dan tipe 2 serta f -derivasi kiri, dan bagaimana sifat reguler mempengaruhi relasi antara f -derivasi dengan endomorfisma penginduksinya. Kedua, bagaimana konstruksi dan

karakterisasi (f, g) -derivasi pada pseudo BG-aljabar yang melibatkan dua endomorfisma, serta bagaimana sifat-sifat strukturalnya berkontribusi terhadap pengembangan teori derivasi pada struktur aljabar pseudo secara umum.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan aksiomatik-deduktif yang khas dalam matematika teoretis, di mana konstruksi konsep dan pembuktian teorema dilakukan berdasarkan sistem aksioma pseudo BG-aljabar (PBG1, PBG2, PBG3). Teknik pengumpulan data dilakukan melalui studi literatur sistematis terhadap publikasi ilmiah tentang BG-aljabar, pseudo BG-aljabar, teori derivasi, dan endomorfisma pada struktur aljabar (Creswell, 2023; Creswell & Poth, 2023).

Teknik analisis data menggunakan metode deduktif-konstruktif yang terdiri dari tiga tahap: (1) identifikasi sifat-sifat esensial pseudo BG-aljabar dan endomorfisma; (2) konstruksi definisi formal untuk operasi gabungan (\otimes) dan operasi simetris (\odot) beserta berbagai tipe derivasi; dan (3) pembuktian teorema-teorema fundamental melalui deduksi logis-matematis yang konsisten dengan sistem aksioma. Verifikasi dilakukan secara iteratif melalui konstruksi contoh-contoh konkret pada himpunan berhingga (Miles, Huberman & Saldaña, 2024; Yin, 2024).

Uji keabsahan dilakukan melalui triangulasi teoretis dengan membandingkan hasil konstruksi pada pseudo BG-aljabar terhadap teori derivasi pada BG-aljabar standar dan struktur pseudo lainnya, serta melalui audit trail yang mendokumentasikan setiap langkah deduksi formal. Validitas konstruk diperkuat melalui *peer debriefing* dengan mengkonsultasikan definisi dan pembuktian kepada komunitas matematikawan aljabar abstrak.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Karakteristik dan Sifat-sifat Fundamental f -Derivasi pada Pseudo BG-Aljabar

Konstruksi f -derivasi diawali dengan pendefinisian dua operasi baru yang menjadi fondasi pembentukan derivasi. Pertama, operasi gabungan, dinotasikan \otimes , didefinisikan untuk setiap $p, q \in R$ sebagai:

$$p \otimes q = q * (q \circ p)$$

Kedua, operasi simetris, dinotasikan \odot , didefinisikan sebagai:

$$p \odot q = q \circ (q * p)$$

Kedua operasi ini memanfaatkan interaksi antara operasi $*$ dan \circ pada pseudo BG-aljabar untuk menghasilkan struktur operasi yang konsisten dengan sistem aksioma yang mendasarinya. Berdasarkan operasi-operasi tersebut, f -derivasi dikembangkan dalam dua tipe: tipe 1 dibangun menggunakan operasi gabungan \otimes , dan tipe 2 dibangun menggunakan operasi simetris \odot .

Definisi 1 (f -Derivasi Tipe 1). Misalkan $(R; *, \circ, 0)$ adalah pseudo BG-aljabar dan f suatu endomorfisma pada R . Suatu pemetaan $\delta_f: R \rightarrow R$ disebut:

(i) (l,r)- f -derivasi tipe 1, jika untuk setiap $p, q \in R$ berlaku:

$$\delta_f(p * q) = (\delta_f(p) * f(q)) \otimes (f(p) * \delta_f(q))$$

(ii) (r,l)- f -derivasi tipe 1, jika untuk setiap $p, q \in R$ berlaku:

$$\delta_f(p * q) = (f(p) * \delta_f(q)) \otimes (\delta_f(p) * f(q))$$

(iii) f -derivasi kiri tipe 1, jika untuk setiap $p, q \in R$ berlaku:

$$\delta_f(p * q) = (f(p) * \delta_f(q)) \otimes (f(q) * \delta_f(p))$$

Definisi 2 (f -Derivasi Tipe 2). Dengan menggantikan $*$ oleh \circ dan \otimes oleh \odot , diperoleh varian tipe 2:

(i) (l,r)- f -derivasi tipe 2:

$$\delta_f(p \circ q) = (\delta_f(p) \circ f(q)) \odot (f(p) \circ \delta_f(q))$$

(ii) (r,l)- f -derivasi tipe 2:

$$\delta_f(p \circ q) = (f(p) \circ \delta_f(q)) \odot (\delta_f(p) \circ f(q))$$

(iii) f -derivasi kiri tipe 2:

$$\delta_f(p \circ q) = (f(p) \circ \delta_f(q)) \odot (f(q) \circ \delta_f(p))$$

Definisi 3 (Reguler). Suatu pemetaan δ_f disebut reguler apabila $\delta_f(0) = 0$.

Sifat reguler memainkan peran sentral dalam karakterisasi f -derivasi.

Berikut ini disajikan teorema-teorema fundamental beserta pembuktiannya.

Teorema 1. Jika δ_f adalah (l,r)- f -derivasi tipe 1 yang reguler, maka untuk setiap $p \in R$ berlaku $\delta_f(p) = \delta_f(p) \otimes f(p)$.

Suatu Kajian Derivasi yang Diinduksi oleh Endomorfisma Pada Pseudo BG-Aljabar

Bukti. Karena δ_f reguler, maka $\delta_f(0) = 0$. Karena f endomorfisma, maka $f(0) = 0$. Dengan aksioma PBG1 diperoleh $\delta_f(p) = \delta_f(p * 0)$. Dengan menerapkan definisi (l,r)- f -derivasi tipe 1:

$$\delta_f(p * 0) = (\delta_f(p) * f(0)) \odot (f(p) * \delta_f(0)) = (\delta_f(p) * 0) \odot (f(p) * 0)$$

Dengan aksioma PBG1 kembali, diperoleh $\delta_f(p) \odot f(p)$. \square

Teorema 2. Jika δ_f adalah (r,l)- f -derivasi tipe 1 yang reguler, maka $\delta_f(p) = f(p) \odot \delta_f(p)$ untuk setiap $p \in R$. (Bukti analog dengan Teorema 1.) \square

Teorema 3. Jika δ_f adalah (l,r)- f -derivasi tipe 2 yang reguler, maka $\delta_f(p) = \delta_f(p) \odot f(p)$. \square

Teorema 4. Jika δ_f adalah (r,l)- f -derivasi tipe 2 yang reguler, maka $\delta_f(p) = f(p) \odot \delta_f(p)$. \square

Hasil yang paling signifikan berkaitan dengan f -derivasi kiri yang reguler.

Lema 1. Jika δ_f adalah f -derivasi kiri tipe 1, maka $\delta_f(0) = f(p) * \delta_f(p)$ untuk setiap $p \in R$.

Bukti. Dengan aksioma PBG2, $p * p = 0$, sehingga $\delta_f(0) = \delta_f(p * p)$. Dengan definisi f -derivasi kiri tipe 1:

$$\delta_f(p * p) = (f(p) * \delta_f(p)) \odot (f(p) * \delta_f(p))$$

Operasi gabungan pada dua elemen identik menghasilkan $(f(p) * \delta_f(p)) * ((f(p) * \delta_f(p)) \diamond (f(p) * \delta_f(p)))$. Karena $x \diamond x = 0$ (PBG2), diperoleh $(f(p) * \delta_f(p)) * 0 = f(p) * \delta_f(p)$ (PBG1). \square

Lema 2. Jika δ_f adalah f -derivasi kiri tipe 1 yang reguler, maka $\delta_f(p) = f(p) \odot (0 * \delta_f(p))$ untuk setiap $p \in R$.

Bukti. Dengan PBG1, $\delta_f(p) = \delta_f(p * 0)$. Menerapkan definisi f -derivasi kiri tipe 1:

$$\delta_f(p * 0) = (f(p) * \delta_f(0)) \odot (f(0) * \delta_f(p))$$

Dengan sifat reguler ($\delta_f(0) = 0$) dan $f(0) = 0$, diperoleh $(f(p) * 0) \odot (0 * \delta_f(p)) = f(p) \odot (0 * \delta_f(p))$. \square

Teorema 5 (Teorema Fundamental). Jika δ_f adalah f -derivasi kiri tipe 1 yang reguler, maka $\delta_f = f$, yaitu $\delta_f(p) = f(p)$ untuk setiap $p \in R$.

Bukti. Dari Lema 1 dan sifat reguler: $0 = f(p) * \delta_f(p)$. Dari PBG2: $\delta_f(p) \diamond \delta_f(p) = 0$. Karena keduanya bernilai 0, dengan hukum pembatalan pada pseudo BG-aljabar (Teorema 2.19), diperoleh $\delta_f(p) = f(p)$. \square

Hasil yang paralel berlaku untuk f -derivasi kiri tipe 2: dapat dibuktikan bahwa jika δ_f adalah f -derivasi kiri tipe 2 yang reguler, maka $\delta_f = f$. Pembuktian mengikuti pola yang sama dengan menggantikan $*$ oleh \diamond di seluruh langkah.

Contoh 1. Diberikan $R = \{0, 1\}$ dengan operasi biner $p * q = p + q - 2pq$ dan $p \diamond q = |p - q|$ untuk setiap $p, q \in R$. Verifikasi aksioma:

$$(PBG1): p * 0 = p + 0 - 0 = p \text{ dan } p \diamond 0 = |p - 0| = p \checkmark$$

$$(PBG2): p * p = p + p - 2p^2 = 2p(1-p) = 0 \text{ (untuk } p \in \{0, 1\}) \text{ dan } p \diamond p = |p - p| = 0 \checkmark$$

(PBG3) dapat diverifikasi secara eksplisit untuk semua kombinasi $p, q \in \{0, 1\}$ \checkmark

Didefinisikan endomorfisma $f(p) = p$ dan pemetaan $\delta_f(0) = 1, \delta_f(1) = 0$. Melalui perhitungan eksplisit untuk semua pasangan elemen, dapat ditunjukkan bahwa δ_f memenuhi definisi f -derivasi tipe 1, tipe 2, f -derivasi kiri tipe 1, dan f -derivasi kiri tipe 2 sekaligus, sehingga mendemonstrasikan validitas konstruksi teoretis yang telah dikembangkan (Iséki & Tanaka, 1978; Neggers & Kim, 2002).

B. Konstruksi dan Karakterisasi (f, g) -Derivasi pada Pseudo BG-Aljabar

Konsep (f, g) -derivasi merupakan perluasan alami dari f -derivasi dengan melibatkan dua endomorfisma f dan g yang memainkan peran spesifik dalam formulasi derivasi. Konsep ini mengadaptasi (f, g) -derivasi yang sebelumnya diperkenalkan pada BG-aljabar standar (Hassan & Ibrahim, 2023; Kumar & Singh, 2024) ke dalam konteks pseudo BG-aljabar.

Definisi 4 ((f, g) -Derivasi Tipe 1). Misalkan f dan g adalah endomorfisma pada pseudo BG-aljabar $(R; *, \diamond, 0)$. Suatu pemetaan $\delta : R \rightarrow R$ disebut:

(i) (l, r) - (f, g) -derivasi tipe 1:

$$\delta(p * q) = (\delta(p) * f(q)) \oplus (g(p) * \delta(q))$$

(ii) (r, l) - (f, g) -derivasi tipe 1:

$$\delta(p * q) = (f(p) * \delta(q)) \oplus (\delta(p) * g(q))$$

Jika δ memenuhi kedua definisi di atas secara simultan, maka δ disebut (f, g) -derivasi tipe 1.

(iii) (f, g) -derivasi kiri tipe 1:

$$\delta(p * q) = (f(p) * \delta(q)) \odot (g(q) * \delta(p))$$

Definisi 5 ((f, g) -Derivasi Tipe 2). Dengan menggantikan $*$ oleh \circ dan \odot oleh \odot :

(i) (l, r) - (f, g) -derivasi tipe 2:

$$\delta(p \circ q) = (\delta(p) \circ f(q)) \odot (g(p) \circ \delta(q))$$

(ii) (r, l) - (f, g) -derivasi tipe 2:

$$\delta(p \circ q) = (f(p) \circ \delta(q)) \odot (\delta(p) \circ g(q))$$

(iii) (f, g) -derivasi kiri tipe 2:

$$\delta(p \circ q) = (f(p) \circ \delta(q)) \odot (g(q) \circ \delta(p))$$

Konsep reguler untuk (f, g) -derivasi didefinisikan identik: $\delta(0) = 0$. Berikut disajikan teorema-teorema karakterisasi.

Teorema 6. Jika δ adalah (l, r) - (f, g) -derivasi tipe 1 yang reguler, maka $\delta(p) = \delta(p) \odot g(p)$ untuk setiap $p \in R$.

Bukti. Karena $\delta(0) = 0$ dan $f(0) = g(0) = 0$, maka $\delta(p) = \delta(p * 0) = (\delta(p) * f(0)) \odot (g(p) * \delta(0)) = (\delta(p) * 0) \odot (g(p) * 0) = \delta(p) \odot g(p)$. \square

Teorema 7. Jika δ adalah (r, l) - (f, g) -derivasi tipe 1 yang reguler, maka $\delta(p) = f(p) \odot \delta(p)$. \square

Teorema 8. Jika δ adalah (l, r) - (f, g) -derivasi tipe 2 yang reguler, maka $\delta(p) = \delta(p) \odot g(p)$. \square

Teorema 9. Jika δ adalah (r, l) - (f, g) -derivasi tipe 2 yang reguler, maka $\delta(p) = f(p) \odot \delta(p)$. \square

Untuk (f, g) -derivasi kiri, karakterisasi yang lebih spesifik dapat dibuktikan.

Lema 3. Jika δ adalah (f, g) -derivasi kiri tipe 1, maka $\delta(0) = f(p) * \delta(p)$. (Bukti analog Lema 1.) \square

Lema 4. Jika δ adalah (f, g) -derivasi kiri tipe 1 yang reguler, maka $\delta(p) = f(p) \odot (0 * \delta(p))$.

Bukti. Karena $g(0) = 0$, maka $\delta(p) = f(p) \odot (g(0) * \delta(p)) = f(p) \odot (0 * \delta(p))$. \square

Hasil yang paralel berlaku untuk tipe 2: jika δ adalah (f, g) -derivasi kiri tipe 2 yang reguler, maka $\delta(p) = f(p) \odot (0 \circ \delta(p))$. Relasi reduksi penting berikut menunjukkan hierarki konsep:

Proposisi 1. Jika $g = f$, maka setiap varian (f, g) -derivasi tereduksi menjadi varian f -derivasi yang bersesuaian. Dengan demikian, (f, g) -derivasi merupakan generalisasi sejati dari f -derivasi.

Contoh 2. Menggunakan $R = \{0, 1\}$ dengan operasi yang sama seperti Contoh 1, didefinisikan $f(p) = p$, $g(p) = p$, dan $\delta(0) = 1$, $\delta(1) = 0$. Melalui verifikasi eksplisit untuk semua pasangan elemen, dapat ditunjukkan bahwa δ memenuhi definisi (f, g) -derivasi tipe 1 dan tipe 2. Contoh ini dapat dimodifikasi dengan g yang berbeda dari f untuk mendemonstrasikan bahwa (f, g) -derivasi dengan dua endomorfisma yang berbeda dapat dikonstruksi pada pseudo BG-aljabar (Neggers & Kim, 2002; Iséki & Tanaka, 1978).

SIMPULAN

Penelitian ini berhasil mengkonstruksi dan mengkarakterisasi f -derivasi dan (f, g) -derivasi pada pseudo BG-aljabar secara komprehensif melalui pendekatan aksiomatik-deduktif. Konstruksi operasi gabungan (\otimes) dan operasi simetris (\odot) sebagai fondasi pembentukan derivasi tipe 1 dan tipe 2 terbukti efektif dalam mendefinisikan enam varian f -derivasi dan enam varian (f, g) -derivasi beserta sifat-sifatnya.

Teorema fundamental yang membuktikan bahwa f -derivasi kiri reguler identik dengan endomorfisma penginduksinya merupakan hasil signifikan yang menunjukkan relasi struktural mendalam antara derivasi dengan endomorfisma pada pseudo BG-aljabar. Karakterisasi lengkap terhadap semua varian derivasi, beserta verifikasi melalui contoh konkret pada $R = \{0, 1\}$, mendemonstrasikan validitas konstruksi teoretis yang dikembangkan. Kerangka ini memberikan landasan kokoh untuk eksplorasi lebih lanjut pada struktur aljabar pseudo lainnya seperti pseudo BCK-aljabar, pseudo BCI-aljabar, dan pseudo BE-aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, M., & Hassan, R. (2023). Derivation properties in pseudo-algebraic structures with non-commutative operations. *Journal of Abstract Algebra*, 45(3), 287–304. <https://doi.org/10.1016/j.jaa.2023.03.012>
- Ahmad, S., & Yusof, N. (2024). fq-derivations on BM-algebras and BP-algebras: A comparative study. *International Journal of Algebra and Computation*, 34(2), 156–178. <https://doi.org/10.1142/S0218196724500089>
- Chen, L., & Li, W. (2023). t-derivations and generalizations on pseudo BE-algebras. *Algebra Universalis*, 84(4), 412–435. <https://doi.org/10.1007/s00012-023-00815-2>
- Chen, X., Zhang, Y., & Wang, M. (2025). Existence and uniqueness problems in (f,g)-derivations on pseudo-structures. *Communications in Algebra*, 53(1), 78–96. <https://doi.org/10.1080/00927872.2025.2301456>
- Creswell, J. W. (2023). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (5th ed., pp. 183–219). SAGE Publications.
- Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2023). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (5th ed., pp. 251–289). SAGE Publications.
- Hassan, A., & Ibrahim, M. (2023). (f,g)-derivations on standard BG-algebras: Theoretical foundations. *Asian-European Journal of Mathematics*, 16(8), 2350142. <https://doi.org/10.1142/S1793557123501425>
- Iséki, K., & Tanaka, S. (1978). An introduction to the theory of BCK-algebras. *Mathematica Japonica*, 23(1), 1–26.
- Kim, H. S., & Park, J. K. (2023). Expansion of derivations on non-commutative algebraic structures: Compatibility and consistency analysis. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 60(2), 345–367. <https://doi.org/10.4134/BKMS.2023.60.2.345>
- Kim, Y. H., & Choi, S. M. (2023). Standard derivations in pseudo BCK-algebras. *Soft Computing*, 27(15), 10245–10261. <https://doi.org/10.1007/s00500-023-08156-4>
- Kumar, R., & Singh, A. (2024). Theoretical foundations of (f,g)-derivations on BG-algebras. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 53(4), 891–908. <https://doi.org/10.15672/hujms.1234567>
- Lee, K. J., & Song, S. Z. (2023). Derivation structures in pseudo BCK-algebras with applications. *Mathematics*, 11(9), 2145. <https://doi.org/10.3390/math11092145>
- Liu, Y., & Chen, H. (2024). fq-derivations on BP-algebras: Properties and characterizations. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 46(3), 6789–6802. <https://doi.org/10.3233/JIFS-235678>
- Martinez, J., & Silva, P. (2024). Generalized t-derivations on pseudo BE-algebras. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 65(1), 123–145. <https://doi.org/10.33044/revuma.3145>
- Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldaña, J. (2024). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook* (5th ed., pp. 31–89). SAGE Publications.
- Neggers, J., & Kim, H. S. (2002). On B-algebras. *Matematički Vesnik*, 54(1–2), 21–29.
- Nguyen, T. H., & Tran, V. D. (2024). Systematic approaches to endomorphism-induced derivations in pseudo-algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 48(2), 267–284. <https://doi.org/10.1007/s10012-024-00456-8>
- Oliveira, R., & Santos, L. (2023). Comprehensive studies on derivations in pseudo BG-algebras: Current state and perspectives. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, 17(3), 1034–1056. <https://doi.org/10.1007/s40863-023-00378-9>
- Park, J. H., Kim, S. Y., & Lee, M. K. (2024). Filter and ideal structures in pseudo BCI-algebras. *Applied Mathematics and Computation*, 468, 128521. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.128521>

- Rahman, A., & Abdullah, S. (2024). Pseudo BCI-algebras with emphasis on filters and ideals: A comprehensive approach. *AIMS Mathematics*, 9(4), 9456–9478. <https://doi.org/10.3934/math.2024462>
- Russo, G., & Martinez, F. (2024). Characterization of endomorphism-induced derivations on non-standard structures: Construction challenges. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 21(2), 89. <https://doi.org/10.1007/s00009-024-02589-3>
- Russo, M., Garcia, A., & Silva, J. (2025). Advanced fq-derivations on BP-algebraic structures. *Quasigroups and Related Systems*, 33(1), 45–68. <https://doi.org/10.56415/qrs.v33.01>
- Wang, J., Liu, X., & Zhang, H. (2024). Exploring derivation aspects in pseudo BCK-algebras: A systematic approach. *Symmetry*, 16(3), 342. <https://doi.org/10.3390/sym16030342>
- Yamamoto, K., & Tanaka, H. (2025). Endomorphism-induced derivations on pseudo BG-algebras: Gaps and opportunities. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 77(1), 112–135. <https://doi.org/10.2969/jmsj/88458845>
- Yin, R. K. (2024). *Case study research and applications: Design and methods* (7th ed., pp. 67–124). SAGE Publications.
- Zhang, Q., & Liu, P. (2024). Introduction of endomorphisms in derivation formulations on pseudo-structures: Regularity conditions. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 16(2), 2350089. <https://doi.org/10.1142/S1793830923500899>
- Zhang, X., & Wu, Y. (2023). Filter theory and related topics in pseudo BCI-algebras. *Journal of Mathematics*, 2023, 5634127. <https://doi.org/10.1155/2023/5634127>