

DIMENSI METRIK PENGHAPUSAN SATU SIMPUL GRAF DUAL PRISMA

Fenny Fitriani

Universitas PGRI Adi Buana Surabaya

fenny_f@unipasby.ac.id

ABSTRAK

Salah satu bentuk dari graf adalah graf dual. Graf dual tersebut didapatkan dari graf yang tidak memiliki sisi yang berpotongan. Salah satu jenis graf dual yang ada adalah graf dual prisma $P'_{m,n}$. Graf dual prisma $P'_{m,n}$ merupakan graf dual yang terbentuk dari graf prisma $P_{m,n}$. Selain itu, dalam teori graf, terdapat kajian mengenai dimensi metrik dari graf. Dimensi metrik dari graf didapatkan dari nilai kardinalitas yang paling kecil dari suatu himpunan pembeda. Dalam paper ini dijabarkan tentang dimensi metrik dari penghapusan satu simpul pada graf dual prisma. Pada graf dual prisma $P'_{m,2}$, penghapusan simpul yang dilakukan pada simpul u_2 . Pada graf dual prisma $P'_{m,n}$, penghapusan simpul yang dilakukan pada simpul u_n . Nilai dari dimensi metrik graf dual prisma $P'_{m,2}$ dengan penghapusan simpul u_2 sama dengan nilai dimensi metrik graf W_n dan nilai dari dimensi metrik graf dual prisma $P'_{m,n}$ dengan penghapusan simpul u_n didapatkan dalam dua kondisi yaitu pada $3 \leq m \leq 5$ dan pada $m \geq 6$.

Kata kunci: dimensi metrik, graf dual, graf dual prisma, penghapusan simpul.

ABSTRACT

One form of graph is a dual graph. The dual graph is obtained from a graph that has no intersecting sides. One type of dual graph that exists is a dual prism graph $P'_{m,n}$. A dual prism graph $P'_{m,n}$ is a dual graph which formed from prism graph $P_{m,n}$. In addition, in graph theory, there is a study of the metric dimensions of graphs. The metric dimension of a graph is obtained from the smallest cardinality of a distinguishing set. In this paper, we describe the metric dimensions of the elimination of one vertex in a dual prism graph. At the dual prism graph $P'_{m,2}$, vertex elimination is performed at the vertex u_2 . At the dual prism graph $P'_{m,n}$, vertex elimination is performed at the vertex u_n . The metric dimension of the dual prism graph $P'_{m,2}$ with the elimination of the vertex u_2 is the same as the value of the metric dimension W_n graph and the metric dimension of the dual prism graph $P'_{m,n}$ with the elimination of the vertex u_n obtained in two conditions for $3 \leq m \leq 5$ and $m \geq 6$.

Keywords: metric dimension, dual graph, dual prism graph, deleting vertex.

PENDAHULUAN

Salah satu jenis graf adalah graf prisma $P_{m,n}$ dengan m menunjukkan jumlah simpul dari graf *cycle* pembentuk graf $P_{m,n}$ dan n menunjukkan jumlah simpul dari graf garis pembentuk graf $P_{m,n}$. Dari graf prisma tersebut dapat dibentuk kedalam graf dual prisma $P'_{m,n}$. Penelitian yang telah dilakukan yang berhubungan dengan graf dual prisma adalah penelitian mengenai dimensi metrik dari graf dual prisma $P'_{m,n}$ (Fitriani, 2018). Dimensi metrik sendiri merupakan nilai kardinalitas yang paling kecil dari suatu himpunan pembeda dari graf. Beberapa penelitian yang berhubungan dengan dimensi metrik telah dilakukan pada beberapa jenis graf antara lain pada graf tangga (Saifudin, 2016), graf khusus pada keluarga pohon (Sulistio, Slamini, & Dafik, 2015), graf $W_n + C_n$ dengan $n \in \{3,4\}$ (Robi Nugraha Sayi Putra, 2018), graf amal (Utomo & Dewi, 2018), dan graf $K_r + mK_s$ dengan $m, r, s \in N$ (Hidayani, 2011),

Selain itu, salah satu operasi yang dapat dilakukan pada graf adalah dengan menghapus salah satu simpul dari graf. penghapusan simpul tersebut mengakibatkan terhapusnya sisi-sisi yang melekat pada simpul yang terhapus. Penelitian yang mengkaji masalah penghapusan simpul dari graf masih belum banyak dilakukan. Salah satu penelitian yang dilakukan yang berkaitan dengan penghapusan simpul adalah penelitian yang dilakukan oleh Arief pada tahun 2012 mengenai palebelan jumlah eksklusif pada graf *hairycycle*. Akan tetapi, penelitian yang mengaitkan penghapusan simpul dengan dimensi metrik masih belum ditemukan. Dalam artikel ini akan dijabarkan mengenai dimensi metrik terhadap graf dual prisma dengan melakukan penghapusan satu simpul.

METODE PENELITIAN

Pada penelitian yang dilakukan, langkah yang dilakukan antara lain:

1. Menkonstruksi graf dual prisma dari graf prisma.
2. Melakukan pengoperasian penghapusan satu simpul dari graf dual prisma yang terbentuk.
3. Menentukan batas atas dan batas bawah dimensi metrik.
4. Menentukan dimensi metrik berdasarkan batas atas dan batas bawah.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Sesuai dengan penelitian yang dilakukan oleh Fitriani pada tahun 2018, diketahui bahwa graf dual prisma $P'_{m,n}$ memiliki simpul $V(P'_{m,n}) = \{u_0, u_n\} \cup \{u_{i,j} | 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq j \leq n\}$. Dalam penelitian ini, penghapusan simpul dari dual graf prisma $P'_{m,n}$ dilakukan pada simpul u_n . Nilai dimensi metrik dari penghapusan simpul u_n didapatkan dalam dua kondisi, yaitu pada $n = 2$ dan $n \geq 3$.

Teorema 1. Jika graf $P'_{m,2} - u_2$ merupakan graf yang terbentuk dari penghapusan simpul u_2 pada graf $P'_{m,2}$, maka dimensi metrik dari $P'_{m,2} - u_2$ adalah $\left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor$ untuk $m \geq 7$.

Bukti. Dari hasil penghapusan simpul u_2 pada graf $P'_{m,2}$ merupakan graf W_m . Sesuai dengan penelitian yang telah dilakukan oleh (Caceres, dkk., 2005), maka $\dim(P'_{m,2} - u_2) = \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor$ untuk $m \geq 7$. ■

Teorema 2. Jika graf $P'_{m,n} - u_n$ merupakan graf yang terbentuk dari penghapusan simpul u_n pada graf $P'_{m,n}$ dengan $n \geq 3$, maka dimensi metrik dari $P'_{m,n} - u_n$ adalah

$$\dim(P'_{m,n} - u_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } 3 \leq m \leq 5 \\ \left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor, & \text{untuk } m \geq 6 \end{cases}$$

Bukti. Pembuktian dari dimensi metrik penghapusan simpul u_n pada graf $P'_{m,n}$ dengan $n \geq 3$ dilakukan pada dua keadaan yaitu pada nilai $3 \leq m \leq 5$ dan $m \geq 6$.

Keadaan 1: Untuk membuktikan nilai $\dim(P'_{m,n} - u_n) = 3$ pada $3 \leq m \leq 5$, maka perlu dibuktikan batas atas dari dimensi atau $\dim(P'_{m,n} - u_n) \leq 3$ apabila $3 \leq m \leq 5$ dan batas bawah dari dimensi atau $\dim(P'_{m,n} - u_n) \geq 3$ apabila $3 \leq m \leq 5$. Untuk batas atas dari dimensi metrik, jika dimisalkan himpunan $W = \{u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}\}$, maka hasil representasi simpul $u \in V(P'_{m,n} - u_n)$ terhadap himpunan W adalah $r(u_0|W) = (1,1,1)$ dan

$r(u_{k,l}|W) = ((k-1) + (l-1), (k-2) + (l-1), (k-3) + (l-1))$ untuk $1 < k < n$. Hal ini menunjukkan bahwa hasil representasi setiap simpul $u \in V(P'_{m,n} - u_n)$ terhadap W berbeda, sehingga W merupakan himpunan pembeda dari $P'_{m,n} - u_n$ pada $3 \leq m \leq 5$. Dengan kata lain didapatkan $\dim(P'_{m,n} - u_n) \leq 3$. Untuk batas bawah dari dimensi metrik, karena setiap simpul pada siklus pertama memiliki tetangga yang sama yaitu simpul u_0 maka mengakibatkan jarak tiap simpul pada siklus pertama maksimal adalah 2. Pada $m = 5$, mudah diketahui bahwa $\dim(P'_{m,n} - u_n) \geq 3$. Pada $m = 3$ dan $m = 4$, karena jarak tiap simpul maksimal 2 sehingga didapatkan $\dim(P'_{m,n} - u_n) \geq 2$. Pada $m = 3$, hasil representasi simpul siklus pertama yang tersisa sama dengan hasil representasi simpul u_0 , $r(u_{k,1}|W) = r(u_0|W)$, sehingga $\dim(P'_{m,n} - u_n) \geq 3$. Pada $m = 4$, hasil representasi simpul siklus pertama yang tersisa sama dengan 2 simpul dari siklus kedua yang bertetangga dengan simpul di W , $r(u_{k,1}|W) = r(u_{l,2}|W)$ untuk $k \neq l$, sehingga $\dim(P'_{m,n} - u_n) \geq 3$. Karena $3 \leq \dim(P'_{m,n} - u_n) \leq 3$ maka $\dim(P'_{m,n} - u_n) = 3$.

Keadaan 2: Untuk membuktikan nilai $\dim(P'_{m,n} - u_n) = \lfloor \frac{2m}{5} \rfloor$ pada $m \geq 6$, maka perlu dibuktikan batas atas dari dimensi atau $\dim(P'_{m,n} - u_n) \leq \lfloor \frac{2m}{5} \rfloor$ apabila $m \geq 6$ dan batas bawah dari dimensi atau $\dim(P'_{m,n} - u_n) \geq \lfloor \frac{2m}{5} \rfloor$ apabila $m \geq 6$. Untuk batas atas dari dimensi metrik, dikonstruksikan himpunan pembeda W dengan $\lfloor \frac{2m}{5} \rfloor$ simpul. Pengkonstruksian yang didapatkan terbagi atas tiga kelompok, yaitu:

- a. Apabila $m \bmod 5 \equiv 1$ atau 2

Apabila dimisalkan $m = 5k + 1$ atau $m = 5k + 2$, hal ini mengakibatkan

$\lfloor \frac{2m}{5} \rfloor = 2k + 1$ dengan $k \geq 1$. Sehingga didapatkan himpunan pembeda

$$W = \{u_{1+5l,1}, u_{3+5l,1} | 0 \leq l < k\} \cup \{u_{5k+1,1}\}.$$

b. Apabila $m \bmod 5 \equiv 3$ atau 4

Apabila dimisalkan $m = 5k + 3$ atau $m = 5k + 4$, hal ini mengakibatkan

$\left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor = 2k + 2$ dengan $k \geq 1$. Sehingga didapatkan himpunan pembeda

$$W = \{u_{3+5l,1}, u_{6+5l,1} | 0 \leq l < k\} \cup \{u_{1,1}, u_{5k+3,1}\}.$$

c. Apabila $m \bmod 5 \equiv 0$

Apabila dimisalkan $m = 5k$, hal ini mengakibatkan $\left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor = 2k$ dengan

$k \geq 1$. Sehingga didapatkan himpunan pembeda $W =$

$$\{u_{3+5l,1}, u_{6+5l,1} | 0 \leq l < k - 1\} \cup \{u_{1,1}, u_{5k-2,1}\}.$$

Dari ketiga kelompok penkontruksian himpunan pembeda W tersebut, didapatkan

untuk setiap $u \in V(P'_{m,n} - u_n)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap

himpunan W . Dengan kata lain, $\dim(P'_{m,n} - u_n) \leq \left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor$. Untuk batas bawah dari

dimensi metrik dilakukan dengan memisalkan $\dim(P'_{m,n} - u_n) = \left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor - 1$.

Apabila $\left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor - 1$ simpul berada pada sikel pertama, maka terdapat hasil

representasi yang sama terhadap himpunan W . Apabila $\left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor - 1$ berada pada n

sikel, maka terdapat representasi simpul yang sama terhadap himpunan W . Dari

uraian tersebut didapatkan bahwa $|W| \geq \left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor$, dengan kata lain $\dim(p'_{m,n} -$

$u_n) \geq \left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor$. Karena $\left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor \leq \dim(P'_{m,n} - U_n) \leq \left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor$, maka $\dim(P'_{m,n} - u_n) =$

$$\left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor. \quad \blacksquare$$

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, maka didapatkan bahwa dimensi metrik dari graf dual prisma $P'_{m,n}$ dengan penghapusan simpul u_n didapatkan dalam dua

keadaan, yaitu nilai dimensi metrik pada $n = 2$ adalah $\dim(P'_{m,2} - u_2) = \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor$

untuk $m \geq 7$ dan nilai dimensi metrik pada $n \geq 3$ adalah $\dim(P'_{m,n} - u_n) = 3$

apabila $3 \leq m \leq 5$ serta $\dim(P'_{m,n} - u_n) = \left\lfloor \frac{2m}{5} \right\rfloor$ apabila $m \geq 6$.

DAFTAR PUSTAKA

- Addinnitya, A. (2012). *Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Matahari, Graf Korona, dan Graf Hairycycle dengan Banyak Simpul Lingkaran Genap*. Depok: FMIPA UI.
- Caceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I. M., Puertas, M. L., Seara, C., & Wood, D. R. (2005). On the metric dimension of some families of graphs. *Electronic Notes in Disc. Math.*, 22, 129-133.
- Fitriani, F. (2018). Dimensi Metrik Graf Dual Prisma. *Unisda Journal of Mathematics and Computer Science*, 4(2), 7-13.
- Hindayani (2011). Dimensi Metrik Graf $K_r + mK_s$, $m, r, s \in \mathbb{N}$. *CAUCHY*, 1(4), 165-174.
- Robi Nugraha Sayi Putra, L. Y. (2018). Dimensi Metrik dari Graf $W_n + C_n$, untuk $n \in \{3,4\}$. *Jurnal Matematika UNAND*, VII(2), 165-169.
- Saifudin, I. (2016). Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Famili Graf Tangga. *JUSTINDO, Jurnal Sistem & Teknologi Informasi Indonesia*, 1(2), 105-112.
- Sulistio, W., Slamin, & Dafik. (2015). Analisis Dimensi Metrik Dengan Himpunan Pembeda Terhubung Pada Graf Khusus Keluarga Pohon Dikaitkan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. *Kadikma*, 6(3), 26-35.
- Utomo, T., & Dewi, N. R. (2018). Dimensi Metrik Graf Amal (nK_m). *Limits: Journal Mathematics and Its Application*, 15(1), 71-77.